<u>Teilbarkeit in N</u>

<u>Definition:</u>
Es seien a, b $\in$ N zwei beliebige natürliche Zahlen. Wir sagen

a teilt b oder
a ist ein Teiler von b oder
b ist ein Vielfaches von a,

und schreiben $a|b$ genau dann, wenn eine natürliche Zahl q mit $b = q \cdot a$ existiert.
Ist a kein Teiler von b, so schreiben wir $a \nmid b$. Es folgen einige der leicht zu beweisenden Eigenschaften der Teilerrelation. Dabei mögen a, b, ... stets natürliche Zahlen sein.

<u>Omnibuslemma:</u>
1) Für jede natürliche Zahl gilt $a|0$, $1|a$ und $a|a$.
2) $a|b \;\wedge\; b \neq 0 \;\Rightarrow\; a \leq b$.
3) $a|1 \;\Rightarrow\; a = 1$.
4) $a|b \;\wedge\; b|a \;\Rightarrow\; a = b$.
5) $a|b \;\wedge\; b|c \;\Rightarrow\; a|c$.
6) Sei $c \neq 0$, dann gilt: $a|b \;\Leftrightarrow\; ac|bc$.
7) $a_1|b_1 \;\wedge\; a_2|b_2 \;\Rightarrow\; a_1a_2|b_1b_2$.
8) $a|b_1 \;\wedge\; a|b_2 \;\Rightarrow\; a|(c_1b_1 + c_2b_2)$ für alle $c_1, c_2 \in Z$.
9) N ist bezüglich der Teilerrelation eine geordnete Menge.
10) a ist genau dann ein Teiler von b, wenn b bei der Division durch a den Rest Null lässt.

Jede natürliche Zahl A mit $a \geq 2$ hat also mindestens zwei Teiler, 1 und a. = triviale Teiler
Alle Teiler von a die kleiner als a sind = echte Teiler.
Die Zahlen 1 und 0 nehmen eine Sonderstellung ein, denn 1 hat nur sich selbst als Teiler, und 0 wird von jeder natürlichen Zahl geteilt.

Rechteckzahlen:
Zahlen, die durch Addition fortlaufender gerader Zahlen gebildet werden, heissen Rechtckzahlen, weil sie durch rechteckige Punktblöcke dargestellt werden können.

Teilerdiagramme:

- Pfeile werden ersetzt und Elemente übereinander geschrieben
- Kreispfeile werden weggelassen
- resultierende Pfeile werden weggelassen

Bsp.: Teilerdiagramm der 12

Beispiele für Beweise von Teilbarkeitsaufgaben:

<u>Behauptung:</u> die Summe von vier aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen ist stets durch 8 teilbar

<u>Beweis:</u> $n = 2m$ (gerade Zahl)

$n = (2m+1)$ (ungerade Zahl)

$\quad + (2m+3)$

$\quad + (2m+5)$

$\underline{\quad + (2m+7)}$

$\quad = (8m+16)$

$\underline{\underline{\quad = 8(m+2)}} \quad \Rightarrow$ durch 8 teilbar!

<u>Behauptung:</u> $3 \mid z = a^3 + 2a$ für alle a aus N

<u>Beweis:</u> 1.Fall: $a = 3k$

$$a^3 + 2a = (3k)^3 + 2(3k) = 3(3^2 + k^3 + 2k)$$

2.Fall: $a = 3k+1$

$$a^3 + 2a = (3k+1)^3 + 2(3k+1)$$
$$= (3k)^3 + 3(3k)^2 + 3(3k) + 1 + (3 \cdot 2k+2)$$

$$s\,(a) = 3b+3 = 3(b+1)$$

3.Fall: $a = 3k+2$

$$a^3 + 2a = (3k+2)^3 + 2(3k+2)$$

$$= (3k)^3 + 3(3k)^2 \cdot 2 + 3(3k) \cdot 2^2 + 2^3 + (3 \cdot 2k + 4)$$

$s(a) = 3c+12 = 3(c+4)$